Vypočítejte obecné řešení, řešení pro dané počáteční podmínky a určete, pro které počáteční podmínky

- je řešení omezené
- řešení konverguje k 0
- řešení má limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.

1) $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0 \qquad y(0) = 1,\ y(1) = -5$

Nalezneme fundamentální systém.

Char. polynom má tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

kořeny jsou tedy čísla 3 a -1, oba mají násobnost 1.

Podle odpovídající věty má fundamentální systém tvar $\{3^n\}$, $\{(-1)^n\}$, obecné řešení je tedy tvaru

$$y(n) = \alpha 3^n + \beta (-1)^n. \qquad (*)$$

Dosazením počátečních podmínek dostáváme

$$1 = y(0) = \alpha \cdot 3^0 + \beta(-1)^0 = \alpha + \beta$$

$$-5 = y(1) = \alpha \cdot 3^1 + \beta(-1)^1 = 3\alpha - \beta$$

z čehož plyne $\alpha = -1$, $\beta = 2$,

řešení pro dané p.p. je tedy

$$y(n) = -3^n + 2(-1)^n.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ a posloupnost

$\{(-1)^n\}$ je omezená a nekonverguje

k nule, dostáváme z $(*)$ následující:

- $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = 0 \iff \alpha = \beta = 0$
- $\{\gamma(n)\}$ je omezená $\iff \alpha = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = +\infty \iff \alpha \neq 0$

- $\lim_{n \to \infty} y(n) = -\infty$ nenastává pro žádnou volbu α, β.

Zbývá převést podmínky na α, β na podmínky pro p.p.

Dosazením $n = 0, 1$ do $(*)$ dostáváme

$$y(0) = \alpha + \beta$$

$$y(1) = 3\alpha - \beta$$

a tedy:

- $\alpha = \beta = 0 \iff \gamma(0) = \gamma(1) = 0$
- $\alpha = 0 \iff \begin{pmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \beta, \ \beta \in \mathbb{R}$

$$\iff \gamma(0) = -\gamma(1)$$

Tedy $\{\gamma(n)\}$ konverguje k 0 pouze v triviálním případě $\{\gamma(n)\} = \{0\}$, je omezená pokud $\gamma(0) = -\gamma(1)$ a v ostatních případech má limitu $+\infty$.

2) $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$

Nalezneme fundamentální systém.

Char. polynom má tvar

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = (\lambda^2+3)^2 = (\lambda+\sqrt{3}\,i)^2(\lambda-\sqrt{3}\,i)^2$$

Existuje tedy právě jeden komplexní kořen s kladnou imaginární částí, jehož násobnost je dva. Protože $i\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ má fundamentální systém tvar

$$(1)\quad \left\{\left(\sqrt{3}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}, \quad \left\{n\left(\sqrt{3}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (2)$$

$$(3)\quad \left\{\left(\sqrt{3}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}, \quad \left\{n\left(\sqrt{3}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (4)$$

Obecné řešení je

$$(**) \quad y(n) = \alpha (\sqrt{3})^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta n (\sqrt{3})^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \gamma (\sqrt{3})^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \delta n (\sqrt{3})^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Dosazením p.p. dostáváme

$$1 = y(0) = \alpha$$

$$0 = y(1) = (\gamma + \delta)\sqrt{3}$$

$$9 = y(2) = 3\alpha + 6\beta$$

$$-18 = y(3) = 3\sqrt{3}\gamma + 9\sqrt{3}\delta$$

z čehož plyne $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{3}$, $\delta = -\sqrt{3}$.

Tedy
$$y(n) = (\sqrt{3})^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + n(\sqrt{3})^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + (\sqrt{3})^{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - n(\sqrt{3})^{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Platí, že všechy posloupnosti fund. systému jsou tvaru $a_n \cdot b_n$ kde $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ a b_n osciluje mezi $\{1, 0, -1\}$.

Dále posloupnosti (1), (2) jsou nulové pro lichá n, zatímco posloupnosti (3), (4) jsou nulová pro sudá n. Nakonec pro sudá n je absolutní hodnota posloupnosti (2) n-krát větší než abs. hodnota posloupnosti (1) a to též platí pro lichá n a posloupnosti (4) a (3).

Z úvahy výše plyne, že pokud

je alespoň jeden z parametrů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
nenulový, pak nutně posloupnost $y(n)$
není omezená a nemá limitu.